

Solución:

Pregunta 1:

1) El Algoritmo simplex asegura no salirse del espacio de soluciones factibles al efectuar cada iteración respetando el criterio de entrada a la base. En efecto, si se tiene que la variable que entra a la base es x_s , para saber cuál es la variable que sale de la base es necesario determinar cuál es la variable que primero se anula cuando x_s crece, para no salirse del espacio factible. Esto es, buscar la primera variable que se anula en cada una de las restricciones del problema en su forma canónica:

$$x_i + a_{is} * x_s = b_i$$

Tomando en consideración las m restricciones, el máximo valor que puede tomar x_s es:

$$\min_{\overline{a}_{is} > 0} \left\{ \frac{\overline{b}_i}{\overline{a}_{is}} \right\}$$

2) El criterio de entrada a la base indica que la variable no básica que entra es aquella que tiene el menor costo reducido, dentro de aquellos que son < 0 . Se ha adoptado esta convención porque trae el mayor mejoramiento local. Sin embargo al escoger esta variable de entrada se esta automáticamente determinando cual será la variable básica que saldrá de la base, y puede darse el caso que esta variable aportaba a la minimización de la función objetivo. Entonces, para lograr la máxima variación habría que escoger como variable de entrada aquella que en conjunto con la variable que sale impliquen la mayor variación en la función objetivo. Para esto es necesario probar todos los casos.

3) Simplex recorre puntos extremos de un poliedro y el número de estos puede llegar a ser exponencial en el tamaño del problema. Dicho de otra forma, el tiempo de terminación del método simplex puede llegar a crecer exponencialmente en términos del tamaño del problema que este resolviendo.

El algoritmo de Karmarkar es de tiempo polinomial. La característica central de este algoritmo es que se mueve por el interior de la región factible (y no por los vértices, como el SIMPLEX). Se lo conoce como un algoritmo de punto interior.

4)

- a. Si la variable de Holgura asociada la restricción de madera vale cero, quiere decir que la restricción es activa, por lo que estaría dispuesto a comprar una unidad adicional de madera a un precio máximo de Y_m . Como en este caso el precio es superior a Y_m , no me conviene, puesto que mi ganancia es menor que el precio que debo pagar. (clave: variable dual es positiva, no debo aceptar el trato y justificación).
- b. Como la restricción asociada al fierro es pasiva, quiere decir que "me sobra fierro" por lo tanto no me sirven nuevas unidades de fierro para aumentar mi beneficio, por lo que sin hacer nuevos cálculos debería rechazar la propuesta a menos que el precio fuera cero.
- c. Si bien conviene comprar la primera unidad de HH al precio ofertado, nadie garantiza que para el resto de las horas sea conveniente el precio ofertado, por lo que no tengo información suficiente para tomar la decisión respecto del negocio.

5) Falso, lo que está garantizado y demostrado es que el valor óptimo (si existe) se alcanza al menos en un vértice de la región factible, pero no es exclusivo. Puede darse que el mismo valor óptimo se alcance en otros puntos de la región factible, por ejemplo cuando la solución contiene infinitas soluciones.

6) Dado el problema primal:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_j c_j * x_j \\ \text{s.a.} \quad & \sum_j a_{ij} * x_j \leq b_i \quad i = 1, \dots, m \\ & x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Su dual es:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_i b_i * y_i \\ \text{s.a.} \quad & \sum_i a_{ij} * y_i \leq c_j \quad j = 1, \dots, n \\ & y_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

Por el teorema debil de dualidad, se tiene que: $\sum_j c_j * x_j \leq \sum_i b_i * y_i$

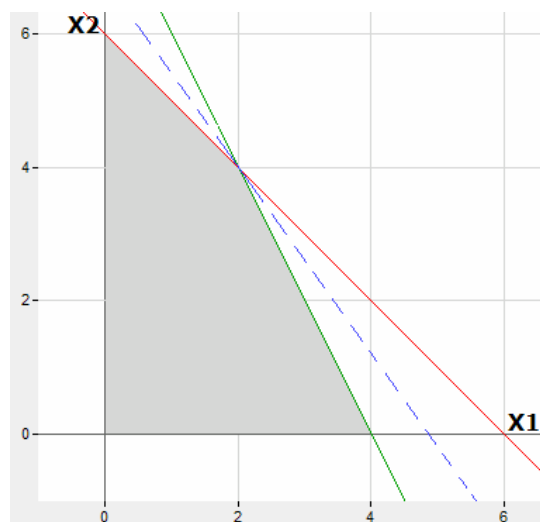
Por lo que si el problema primal es no acotado, el dual es claramente infactible.

Pregunta 2:

1)

$$\begin{aligned} \max \quad & z = \{7x_1 + 5x_2\} \\ \text{s.a.} \quad & x_1 + x_2 \leq 6 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

2)



El óptimo es $x_1=2$ y $x_2=4$, con $z=34$

3) **Nota:** A continuación se presenta el desarrollo de simplex comenzando desde el origen como base factible inicial. Sin embargo, en el enunciado sólo se pide verificar que el punto encontrado gráficamente es óptimo, por lo que es válido comenzar a iterar desde ese punto, escribiendo adecuadamente la base.

Primero se debe llevar el problema a la forma estándar

$$\begin{aligned} \min -z &= \{-7x_1 - 5x_2\} \\ \text{s.a. } x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 &= 8 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Comenzamos desde el origen, por lo que las variables no básicas son X_1 y X_2 . Las variables básicas son X_3 y X_4 . Con lo anterior se tiene que:

$$\begin{aligned} B &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \Rightarrow & B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ R &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} & \Rightarrow & \bar{R} = B^{-1} * R = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\ b &= \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} & \Rightarrow & \bar{b} = B^{-1} * b = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Veamos si el punto es el óptimo del problema, calculando los costos reducidos:

$$\begin{aligned} \bar{Cr} &= [-7 \quad -5] - [0 \quad 0] * \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\ &\Rightarrow \bar{Cr} = [-7 \quad -5] \end{aligned}$$

No estamos en el óptimo pues existen costos reducidos negativos.

Criterio de entrada a la base: Entra la variable con menores costos reducidos, entonces entra X_1

$$\text{Criterio de salida de la base: } \min_{ais} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{a_{is}} \right\} = \left\{ \frac{6}{1} \quad \frac{8}{2} \right\} \Rightarrow \text{Sale } X_4$$

Con esto, las nuevas variables básicas son X_3 y X_1 y las no básicas X_4 y X_2

Ahora iteramos:

$$\begin{aligned}
B &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} & \Rightarrow & B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \\
R &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} & \Rightarrow & \bar{R} = B^{-1} * R = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \\
b &= \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} & \Rightarrow & \bar{b} = B^{-1} * b = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Veamos si el punto es el óptimo del problema, calculando los costos reducidos:

$$\begin{aligned}
\bar{Cr} &= [0 \quad -5] - [0 \quad -7] * \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \\
&\Rightarrow \bar{Cr} = [7/2 \quad -3/2]
\end{aligned}$$

No estamos en el óptimo pues existen costos reducidos negativos.

Criterio de entrada a la base: Entra la variable con menores costos reducidos, entonces entra X_2

$$\text{Criterio de salida de la base: } \min_{ais} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{is}} \right\} = \left\{ \frac{2}{1/2} \quad \frac{4}{1/2} \right\} \Rightarrow \text{Sale } X_3$$

Con esto, las nuevas variables básicas son X_2 y X_1 y las no básicas X_4 y X_3

Iteramos nuevamente:

$$\begin{aligned}
B &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} & \Rightarrow & B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\
R &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & \Rightarrow & \bar{R} = B^{-1} * R = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\
b &= \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} & \Rightarrow & \bar{b} = B^{-1} * b = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Veamos si el punto es el óptimo del problema, calculando los costos reducidos:

$$\bar{Cr} = [0 \quad 0] - [-5 \quad -7] * \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \overline{Cr} = [2 \quad 3]$$

Como ambos costos reducidos son positivos, estamos en el óptimo.

Por lo tanto, el punto óptimo es $X_1=2$, $X_2=4$ y con esto $Z=34$.

4) Según simplex, para que la base siga siendo factible, debe cumplirse que:

$$\bar{b} = B^{-1} * b \geq 0$$

Entonces:

$$\bar{b} = B^{-1} * b = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 2b_1 - 8 \\ -b_1 + 8 \end{pmatrix} \geq 0$$

Por lo tanto:

$$b_1 \in [4, 8]$$

Basta con esto pues los costos reducidos no cambian.

5) Según simplex, se debe cumplir que los costos reducidos deben ser positivos.

Entonces:

$$\overline{Cr} = [0 \quad 0] - [c \quad -7] * \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = [c+7 \quad -2c-7] \geq 0$$

De donde se obtiene:

$$c \in [-7, -7/2]$$

Por lo tanto, el precio de las pelotas puede variar entre $7/2$ y 7 unidades monetarias (Recordar que la constante c recién calculada es para el problema en forma estándar).

6)

$$\begin{aligned} \min z &= \{6y_1 + 8y_2\} \\ \text{s.a. } y_1 + 2y_2 &\geq 7 \\ y_1 + y_2 &\geq 5 \\ y_1, y_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

7) Hay 2 formas de resolver esto:

Forma 1: Las condiciones de holgura complementaria son:

$$\begin{aligned} (A_{i\bullet} \cdot x^* - b_i) \cdot y_i^* &= 0 \quad \forall i \\ (c_j - y^* \cdot A_{\bullet j}) \cdot x_j^* &= 0 \quad \forall j \end{aligned}$$

Luego:

$$((1 \quad 1) * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - 6) * y_1 = (x_1 + x_2 - 6)y_1 = 0 * y_1 = 0 \Rightarrow y_1 \in \Re$$

$$((2 \quad 1) * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - 8) * y_2 = (2x_1 + x_2 - 8)y_2 = 0 * y_2 = 0 \Rightarrow y_2 \in \Re$$

$$(7 - (y_1 \quad y_2)) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} * x_1 = (7 - y_1 - 2y_2)x_1 = 0$$

$$(5 - (y_1 \quad y_2)) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} * x_2 = (5 - y_1 - y_2)x_2 = 0$$

De donde $y_1=3$ e $y_2=2$. Con esto, $z=6*3+8*2=34$.

Forma 2: Tenemos que:

$$X_d^t * y_h = 0 \Rightarrow (x_1 \quad x_2) \begin{pmatrix} y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = 0$$

Como $x_1, x_2 > 0$, entonces $y_3=y_4=0$ y las restricciones del dual son activas.

Por otra parte:

$$X_h^t * y_d = 0 \Rightarrow (0 \quad 0) \begin{pmatrix} y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = 0$$

Entonces y_3, y_4 son reales (esto no nos dice mucho, de hecho dado la condición anterior, no era necesario escribirlo).

Por lo tanto:

$$y_1 + 2y_2 = 7$$

$$y_1 + y_2 = 5$$

Y de este sistema, $y_1=3, y_2=2, z=34$.

8) veamos qué pasa si aceptamos la oferta. Nos quedaría el siguiente problema:

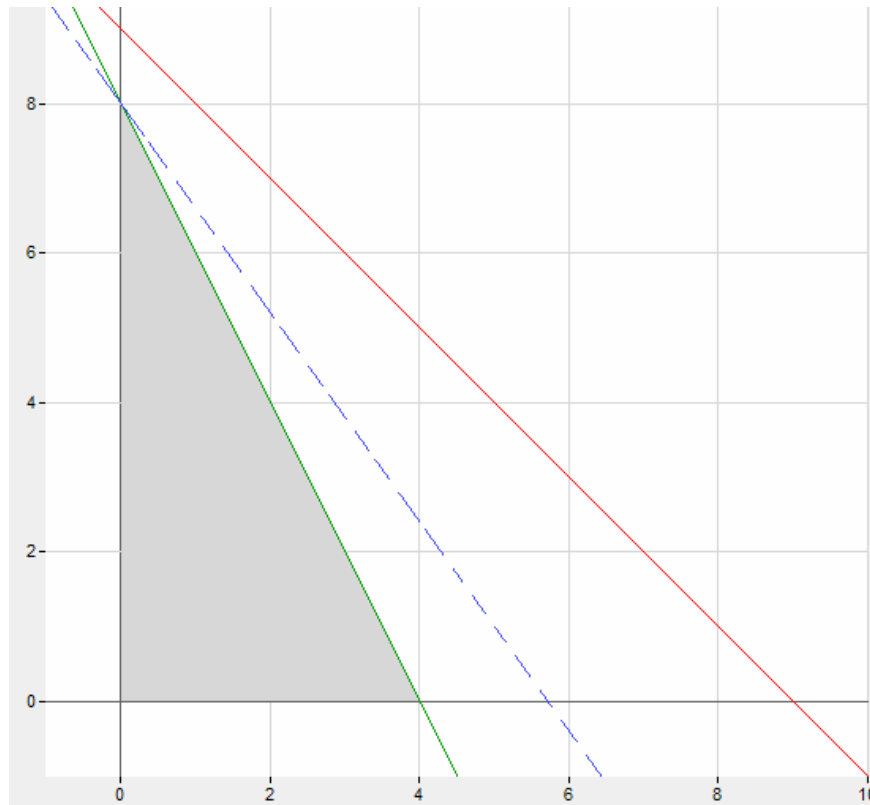
$$\max z = \{7x_1 + 5x_2 - 7,5\}$$

$$s.a. \quad x_1 + x_2 \leq 9$$

$$2x_1 + x_2 \leq 8$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Gráficamente vemos que:



¡La base óptima cambia!, y el óptimo es $x_1=0$, $x_2=8$ con lo que $z=32,5$ que es peor que 34 del problema original, por lo que no me conviene comprar las 3 unidades. (este es sólo uno de los argumentos posibles, no es necesario graficar el nuevo problema. Sí deben mencionar que la base cambiará).

Problema 3:

1) Se deben plantear 3 ppl, uno para set covering, uno para set packing y otro para set partitioning. El planteamiento general de estos problemas es el siguiente:

Set Covering:

Parámetros:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \in M_j, \forall i=1,\dots,m ; \forall j=1,\dots,n \\ 0 & \sim \end{cases}$$

Variable:

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{si } j \in F, \forall j=1,\dots,n \\ 0 & \sim \end{cases}$$

Restricciones:

1.- Cada elemento de M debe estar contenido al menos una vez en alguno de los Mj:

$$\sum_j a_{ij} * x_j \geq 1 \quad \forall i=1,\dots,m$$

2.- Naturaleza de las variables:

$$x_j \in \{0,1\}$$

Función objetivo:

$$\min z = \sum_j c_j * x_j$$

(También era valido poner maximización de acuerdo al enunciado)

Set Packing:

Parámetros:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \in M_j, \forall i=1,\dots,m ; \forall j=1,\dots,n \\ 0 & \sim \end{cases}$$

Variable:

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{si } j \in F, \forall j=1,\dots,n \\ 0 & \sim \end{cases}$$

Restricciones:

1.- Cada elemento de M puede estar a lo más una vez en alguno de los Mj (no puede estar en 2 Mj diferentes, pues sino la intersección de estos no sería vacía):

$$\sum_j a_{ij} * x_j \leq 1 \quad \forall i=1,\dots,m$$

2.- Naturaleza de las variables:

$$x_j \in \{0,1\}$$

Función objetivo:

$$\min z = \sum_j c_j * x_j$$

(También era valido poner maximización de acuerdo al enunciado)

Set Partitioning:

Parámetros:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \in M_j, \forall i=1,\dots,m ; \forall j=1,\dots,n \\ 0 & \sim \end{cases}$$

Variable:

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{si } j \in F, \forall j=1,\dots,n \\ 0 & \sim \end{cases}$$

Restricciones:

1.- Cada elemento de M debe estar en alguno de los Mj, y sólo en uno de ellos (covering + packing):

$$\sum_j a_{ij} * x_j = 1 \quad \forall i=1,\dots,m$$

2.- Naturaleza de las variables:

$$x_j \in \{0,1\}$$

Función objetivo:

$$\min z = \sum_j c_j * x_j$$

Nota de corrección: En el enunciado no se pide escribir el problema general, por lo que es válido si el alumno plantea estos problemas para el caso particular dado. En ese caso, se debe escribir la matriz A del caso particular:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Y el modelo queda igual al anterior, sólo que la restricción 1 queda:

$$A * x = e$$

siendo A la matriz anteriormente definida y "e" un vector de 1s. (ojo que este es el caso para el set partitioning, en el set packing y set covering va con la desigualdad respectiva).

Los óptimos para cada caso son:

Set covering: $x_1 = x_2 = x_3 = 1, x_4 = 0$. Con esto, $z = -10$

Set packing: $x_2 = 1, x_1 = x_3 = x_4 = 0$. Con esto, $z = -6$

Set partitioning: $x_3 = x_4 = 1, x_1 = x_2 = 0$. Con esto, $z = -3$

Criterio de corrección: Encontrar el óptimo para cada caso no debe valer más de 0,1 pto por caso, esto se pide sólo para facilitar la visualización del problema. Lo importante aquí es plantear el modelo, por lo tanto, cada modelo vale 0,9 pts (0,3 por crear la variable correctamente, 0,5 por escribir bien la restricción 1 y 0,1 por la naturaleza de las variables -> Escribir solo la matriz A no da puntaje).

2)

Variables:

X = Puntos en el espacio

$$t_i = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in P^i, \quad \forall i=1, \dots, m \\ 0 & \sim \end{cases}$$

Nota: En estricto rigor, t_i puede valer tanto 1 como 0 cuando x está en P^i (analizar restricción 1 para ver que esto es cierto). El alumno debe señalar esto para tener todo el puntaje de la segunda variable.

Restricciones:

1.- Si x pertenece al poliedro i , debe cumplirse que $A_i x \leq b_i$:

$$A_i * x \leq b_i + w_i * (1 - t_i) \quad \forall i=1, \dots, m$$

2.- x debe estar en al menos k poliedros

$$\sum_i t_i \geq k$$

3.- X acotado entre 0 y d

$$0 \leq x \leq d$$

4.- Naturaleza de las variables:

$$t_i \in \{0,1\} \quad ; \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Nota: Este problema no tiene función objetivo.

Criterio de corrección: 0,4 cada variable. 0,7 restricción 1. 0,6 restricciones 2 y 3. 0,3 naturaleza de las variables.

Dudas y/o comentarios a:

André Carboni

acarboni@ing.uchile.cl